Universidade Federal do Recôncavo da Bahia
Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas
Bacharelado em Ciências Exatas e Tecnológicas

TRANSFORMADAS DE LAPLACE EM CIRCUITOS ELÉTRICOS RLC

FELLIPE MEIRA SOUZA E SOUZA

CRUZ DAS ALMAS
6 DE NOVEMBRO DE 2017

Ciências Exatas e Tecnológicas

Fellipe Meira Souza e Souza

2017

Agradecimentos

Quero agradecer, em primeiro lugar, a Deus, pela força e coragem durante toda esta longa caminhada.

Agradeço muito aos meus pais, que sempre me deram todo o suporte para que eu pudesse chegar até este momento, sempre confiando em mim e apoiando minhas decisões.

Obrigado meus tios, irmãos e avós maternos, que nos momentos de minha ausência dedicados ao estudo superior, sempre fizeram entender que o futuro é feito a partir da constante dedicação no presente.

Agradeço a minha namorada Mirela, por todo carinho e companheirismo.

Agradeço aos meus amigos, que me proporcionaram tantas alegrias durante estes anos, e que foram imprescindíveis para o meu crescimento.

Muito obrigado ao meu orientador Paulo Henrique, pelo grande empenho dedicado à elaboração deste trabalho, tornando-o possível.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“A persistência é o caminho do êxito.”

(Charles Chaplin)

Resumo

Nas Ciências Exatas e Tecnológicas nos deparamos com vários problemas que podem ser descritos por equações diferenciais cujas soluções são usadas, por exemplo, para projetar pontes, automóveis, aviões e circuitos elétricos. Um método bastante utilizado para encontrar soluções dessas equações é o da transformada de Laplace, desde que as funções envolvidas no problema sejam seccionalmente contínuas e possuam ordem exponencial. Uma vez isso constatado, o método torna-se muito vantajoso. Uma outra aplicação importante dessas transformadas é a possibilidade de se analisar circuitos elétricos no domínio da frequência. Sendo assim, neste trabalho, apresentaremos várias definições e propriedades da transformada de Laplace, assim como sua aplicação na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias lineares com coeficientes constantes. Além disso, iremos mostrar a utilidade deste método na análise de circuitos elétricos, exibindo e exemplificando o conceito de função de transferência e variáveis de estado.

Palavras-chave: Transformadas de Laplace. Equações diferenciais. Circuitos elétricos.

Abstract

In Exact and Technological Sciences we are faced with several problems that can be described by differential equations whose solutions are used, for example, to design bridges, automobiles, airplanes and electrical circuits. A method widely used to find solutions of these equations is that of the Laplace transform, since the functions involved in the problem are sectionally continuous and have an exponential order. Once this is found, the method becomes very advantageous. Another important application of these transformations is the possibility of analyzing electrical circuits in the frequency domain. Thus, in this work, we will present several definitions and properties of the Laplace transform, as well as its application in the resolution of linear Ordinary Differential Equations with constant coefficients. In addition, we will show the utility of this method in the analysis of electric circuits, showing and exemplifying the concept of transfer function and state variables.

Keywords: Laplace Transforms. Differential equations. Electric circuits.

Lista de ilustrações

Sumário

Introdução

O método das *transformadas de Laplace* é bastante utilizado em vários campos da engenharia por sua aplicabilidade em equações diferenciais e análises no domínio da frequência complexa. Apesar de ter sido desenvolvida por diversos nomes, a transformada que leva o nome do matemático francês Pierre Simon Laplace (Beaumont-en-Auge, 23 de março de 1749 Paris, 5 de março de 1827), teve como grande contribuinte para que toda teoria se tornasse um método viável o físico inglês Oliver Heaviside (Londres, 18 de maio de 1850 Torquay, 3 de fevereiro de 1925).

Apesar de existirem outros mecanismos para resolução de equações diferenciais, este método se destaca vista aos demais devido a simplicidade do seu processo que ocorre de maneira sistemática, onde as derivadas de equações diferenciais, juntamente com os seus problemas de valor inicial, transformam-se em equações algébricas, possibilitando um melhor manuseio. A vantagem em relação a métodos de solução para Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) é o fato de que estes problemas são resolvidos de maneira direta, sem a necessidade inicial de se encontrar uma solução geral.

Particularmente, as EDO's lineares com coeficientes constantes são as mais vistas em problemas reais da engenharia como, por exemplo, em análise de crescimento populacional, equações de transferência de calor e circuitos elétricos. Devido a maior aplicação nessas áreas correlacionadas, o enfoque principal do trabalho foi o estudo de equações deste tipo.

Nos circuitos elétricos, a transformada de Laplace se torna ainda mais importante, além do fato da modelagem do seu sistema ser regido por equações diferenciais, fato que permite a solução de problemas para a descoberta, por exemplo, de tensões e correntes do circuito, a análise no domínio da frequência através de funções de transferência e variáveis de estado nos permite obter respostas futuras de funcionamento dos circuitos apenas conhecendo seus componentes estruturais.

Uma importante ressalva é o fato de que o método das transformadas de Laplace apenas se aplica a sistemas lineares invariantes no tempo, ou seja, sistemas cujos parâmetros não são alterados com o tempo (também chamados de sistemas com parâmetros constantes).

O objetivo deste trabalho é apresentar cuidadosamente as mais importantes propriedades e definições acerca da transformada de Laplace, que posteriormente serão aplicadas nas resoluções de equações diferenciais e também na análise de circuitos elétricos no domínio da frequência trazendo conceitos importantes como as funções de transferência e variáveis de estado.

No Capítulo 1, apresentamos detalhadamente os teoremas que provam a existência e unicidade da transformada de Laplace seguidos de importantes propriedades, definições e tabelas que serão imprescindíveis no prosseguimento do estudo em questão.

No Capítulo 2, demonstramos a aplicação da transformada de Laplace para a resolução de EDO lineares com coeficientes constantes, homogêneas e não homogêneas, apresentando a resolução de alguns exercícios.

No Capítulo 3, mostramos de maneira detalhada como ocorre a passagem de um circuito RLC do domínio do tempo para o da frequência, apresentando o conceito de função de transferência e variáveis de estado, e aplicando-os em um circuito elétrico RLC.

Por fim, no Capítulo 4, foi discutida a eficiência da transformada de Laplace para as aplicações presentes no trabalho, apresentando considerações finais e conclusões.

1

A Transformada de Laplace

A Transformada de Laplace é um operador linear bastante utilizado nas ciências exatas. Podemos entendê-la como uma espécie de passagem na análise de sistemas lineares invariantes no tempo, tais como circuitos elétricos, osciladores harmônicos, dispositivos ópticos e sistemas mecânicos, do domínio do tempo para o da frequência. Problemas que envolvem integrações e derivações tornam-se multiplicações e divisões. As equações diferenciais são transformadas em equações polinomiais e, quase sempre, em uma mais simples de se encontrar a solução. Veja em (SPIEGEL, 1965).

***Definição* 1.1.** *Seja $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função real (definida para valores reais positivas). A **Transformada de Laplace** $\mathcal{L}\{f\}$ da função $f = f(t)$ é uma função $F(s)$ definida por:*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)\; e^{-st}\; dt, \tag{1}$$

para todos os valores complexos de $s = \alpha + j\beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, que tornem convergente a integral em (1)*, em que j é a unidade imaginária.*

A função $f(t)$ é chamada a **transformada inversa** de $F(s)$ e é representada por $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$. Observe que a variável s é tratada como constante, pois a integração é em relação a t e que, por ser imprópria, a integral é calculada da seguinte forma:

$$\int_0^{+\infty} f(t)\; e^{-st}\; dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f(t)\; e^{-st} dt.$$

Para $f(t) = 1$, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\; dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_0^b = \frac{1}{s}.$$

Observe que para tal relação existir devemos ter a parte real de s estritamente positiva, isto é, $Re(s) > 0$, De fato,

$$e^{-sb} = e^{-\alpha b - j\beta b} = e^{-\alpha b} e^{-j\beta b} = e^{-\alpha b}[\cos(\beta b) + j\,\text{sen}(\beta b)],$$

onde usamos a fórmula de Euler $e^{j\theta} = \cos(\theta) + j\,\text{sen}(\theta)$. Se b tende a infinito, $e^{-\alpha b} \to 0$ e a integral converge, uma vez que os valores absolutos de $\cos(\beta b)$ e $\text{sen}(\beta b)$ estão limitados ao intervalo $[0, 1]$. A convergência desta integral é, obviamente, algo importante e discutiremos numa seção à *posteriori*.

***Proposição* 1.1.** *A transformada de Laplace da função $f(t) = t$ é $\dfrac{1}{s^2}$.*

Demonstração: Aplicando a definição e efetuando-se os devidos cálculos, temos:

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b t\, e^{-st}\, dt$$

Realizando uma integração por partes,

$$\lim_{b\to\infty} \left[-\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^b = \frac{1}{s^2}.$$

1.1 Existência e Unicidade da Transformada de Laplace

Operadores, em geral, necessitam de uma análise sobre a condição de existência. É o caso, por exemplo, do operador ∇, que para determinar o gradiente ∇f de uma função f necessita que esta seja diferenciável. Com o operador transformada de Laplace não é diferente, ou seja, para determinadas funções nem sempre é possível obtê-lo.

Mostraremos que duas condições determinarão uma classe de funções que possuem a transformada de Laplace: a continuidade e uma determinada majoração para a função a ser transformada.

Definição* 1.2.** *Dizemos que uma função f é* ***seccionalmente contínua *em um intervalo $[a, b]$, se existe uma partição*

$$a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n \leq b,$$

de modo que f seja contínua em cada subintervalo aberto (t_{i-1}, t_i), $i = 1, \ldots, n$.

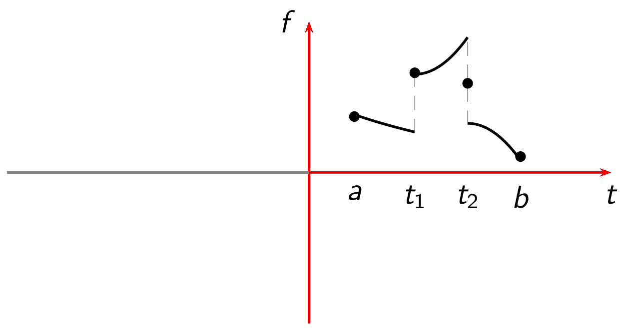

Figura 1 – Função seccionalmente contínua

Em outras palavras, f é seccionalmente contínua no intervalo $[a, b]$ se ela é contínua em todo intervalo, exceto em um número finito de pontos $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ deste intervalo. É importante observar que pela continuidade em cada subintervalo, que os limites laterais $\lim_{t \to t_i^+} f(t)$ e $\lim_{t \to t_{i-1}^-} f(t)$ existem (são números).

Observe que toda função contínua é seccionalmente contínua.

Um exemplo de uma função que não é seccionalmente contínua é $f(t) = \dfrac{1}{t}$ (Veja o gráfico na Figura 2), uma vez que os limites laterais em $t = 0$ são infinitos.

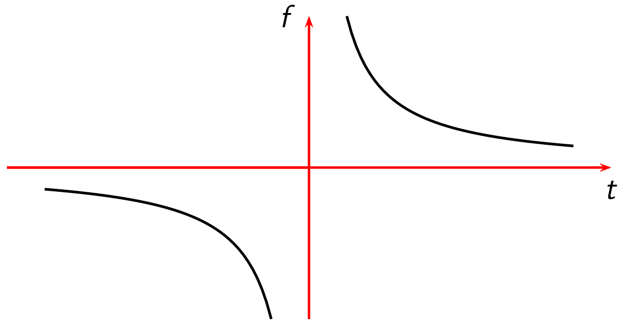

Figura 2 – Gráfico de $f(t) = \dfrac{1}{t}$

***Definição* 1.3.** *Diz-se que f é de **ordem exponencial** se a função pode ser majorada por uma exponencial do tipo e^{ct}, i.e, existem constantes M, c e T não-negativas, tais que $|f(t)| \leq Me^{ct}$ sendo $t < T$.*

A função $f(t) = \cos(2t)$, por exemplo, é de ordem exponencial em $[0, \infty)$ pois para $M = 1$ e $c = 0$, temos:

$$|f(t)| = |\cos(2t)| \leq Me^{ct} = 1, \forall\ t > 0.$$

Já $f(t) = e^{t^2}$ não possui ordem exponencial, porque não existem constantes M e c tais que $e^{t^2 - ct} \leq M$. De fato,

$$\lim_{t \to \infty} e^{t^2 - ct} = +\infty.$$

Vejamos como as propriedades 1.2 e 1.3 constroem uma classe de funções que possuem transformada de Laplace.

Sabemos que se a integral imprópria converge absolutamente, então ela converge, ver (LIMA, 1993). Se

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(t)\, e^{-st}|\, dt &\leq \int_0^\infty Me^{ct}\, e^{-st}\, dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-(s-c)t}\, dt \\ &= \frac{M}{s-c} \end{aligned}$$

Como essa integral converge apenas para $s > c$, temos:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}, \forall\ s > c.$$

Portanto, se a função f satisfaz tais condições, encontraremos sua transformada $F(s)$. Com isso, podemos enunciar o seguinte resultado:

***Teorema* 1.1.** *Se f é uma função seccionalmente contínua no intervalo $[0, +\infty)$ e de ordem exponencial, então possui Transformada de Laplace F.*

Iremos denotar por $\mathcal{F}$ o conjunto de funções que são seccionalmente contínuas e possuem ordem exponencial.

É importante destacar que a recíproca do Teorema 1.1 é falsa, ou seja, se a função f não for seccionalmente contínua ou não for de ordem exponencial, ainda assim existem funções que admitem a transformada de Laplace. Com efeito, a função $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ não é de ordem exponencial, mas admite ser transformada.

Depois de mostrada a existência da transformada de Laplace de uma certa classe de funções queremos verificar um outro aspecto importante: a **unicidade**. Para isso, podemos questionar se $\mathcal{L}$ é injetora, ou seja, se $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$ implica que $f = g$? De forma análoga, se uma equação da forma

$$\mathcal{L}\{y\} = \psi(s)$$

pode ser resolvida encontrando apenas um y quando é dada a transformada $\psi(s)$.

Assim como iremos discutir mais a frente acerca da linearidade de $\mathcal{L}$, existe uma dificuldade que nos impede de dar uma resposta afirmativa pois, se f e g são funções em t que diferem apenas nos seus pontos de descontinuidade, então $\mathcal{L}\{f\} = \mathcal{L}\{g\}$ mesmo que $f \neq g$. Assim, se essas duas funções forem “quase” idênticas e caso isso aconteça, certamente estaríamos justificados em afirmar que, para todos os propósitos práticos, $\mathcal{L}$ é injetora. O seguinte teorema garante que é e, por isso, é um dos resultados mais importantes na teoria da transformada de Laplace.

***Teorema* 1.2** (Teorema de Lerch)**.** *Sejam f e g funções de $\mathcal{F}$ e suponha que existe um número real s_0 tal que $\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \forall\ s > s_0$. Então, com a possível exceção de pontos de descontinuidade, $f(t) = g(t), \forall\ t > 0$.*

Demonstração: Ver (KREIDER; KULLER; OSTBERG, 1968). Para uma referência em português, ver também (FIGUEIREDO; NEVES, 2005) .

Assim, sempre que tivermos uma equação

$$\mathcal{L}\{y\} = \psi(s)$$

poderemos encontrar uma solução y “essencialmente” única.

Esta solução é chamada a **transformada inversa de Laplace** da função ψ, e é denotada por $\mathcal{L}^{-1}[\psi]$. A transformada inversa é uma importante propriedade, e será abordada logo a seguir.

Em outras palavras, podemos dizer que admite-se até que as funções $f(t)$ e $g(t)$ sejam distintas, porém, se caso elas forem iguais nos pontos em que ambas são contínuas, pode-se dizer que existe unicidade entre elas.

Agora que conhecemos o teorema da unicidade da transformada de Laplace (Teorema de Lerch), podemos definir o operador linear inverso.

***Definição* 1.4.** *Considerando que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, a transformada inversa de Laplace de $F(s)$ será a função $f(t)$.*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) \qquad (2)$$

***Teorema* 1.3.** *As propriedades da linearidade do operador de Laplace, no qual iremos apresentar a seguir, também são válidas para o operador inverso.*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) + aG(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + a\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} \qquad (3)$$

A demonstração desse teorema é análoga a da equação (4)*.*

1.2 Propriedades da transformada de Laplace

Agora, iremos nos ater a mostrar propriedades que irão auxiliar no complemento do estudo das transformadas.

1.2.1 Linearidade do Operador $\mathcal{L}$

Na Álgebra, uma função f é dita linear se satisfaz as propriedades de aditividade ($f(x+y) = f(x) + f(y)$) e homogeneidade $f(ax) = af(x)$. Admitamos que f e g sejam duas funções que possuem transformada de Laplace. Utilizando a definição do operador e as propriedades de integral,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t) + ag(t)\} &= \int_0^{+\infty} [f(t) + ag(t)]\; e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \; + \; a\int_0^{+\infty} g(t)\, e^{-st}\, dt \\
&= \mathcal{L}\{f(t)\} + a\mathcal{L}\{h(t)\}
\end{aligned}$$

O que acabamos de mostrar é que o operador $\mathcal{L}$ é linear e sintetizaremos essa propriedade com o,

***Teorema* 1.4.** *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ duas funções que possuem transformada de Laplace e a uma constante qualquer. Então:*

$$\mathcal{L}\{f(t)+ag(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}+a\mathcal{L}\{h(t)\}. \tag{4}$$

A linearidade deste operador é utilizada na obtenção da transformada de Laplace de algumas funções, como nos casos das trigonométricas e trigonométricas hiperbólicas. Entretanto, vamos precisar do seguinte resultado:

***Proposição* 1.2.** *A transformada de Laplace da função $f(t)=e^{at}$, $a\in\mathbb{R}$ é $\dfrac{1}{s-a}$ ($a=0$, teremos $f(t)=1$ e a sua transformada de Laplace já fora obtida).*

Demonstração: Aplicando a definição e efetuando-se os devidos cálculos, temos:

$$\int_0^{+\infty} e^{at}\, e^{-st}\, dt=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-(s-a)t}dt=\lim_{b\to\infty} -\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\bigg|_0^b=\frac{1}{s-a}.$$

Observe que para o limite existir devemos satisfazer a condição de convergência $s>a$, caso contrário, o resultado do limite será ∞ e não irá existir a transformada.

***Proposição* 1.3.** *A transformada de Laplace da função $\cos(\omega t)$, $t\geq 0$ é $\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$, $s>0$.*

Demonstração: Pela fórmula de Euler,

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t)+j\,\mathrm{sen}(\omega t) \tag{5}$$
$$e^{-j\omega t} = \cos(\omega t)-j\,\mathrm{sen}(\omega t). \tag{6}$$

Adicionando as equações (5) e (6), temos que

$$\cos(\omega t)=\frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}.$$

Utilizando a propriedade da linearidade:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}=\frac{1}{2}\left[\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}+\mathcal{L}\{\ e^{-j\omega t}\}\right]$$

Como já calculamos a transformada de uma função exponencial, substituiremos diretamente na fórmula

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega}+\frac{1}{s+j\omega}\right].$$

Simplificando, obtemos:

$$\mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}=\frac{s}{s^2+\omega^2},\ s>0. \tag{7}$$

O processo de cálculo da transformada de Laplace para a função $\text{sen}(\omega t)$ é análogo ao do cálculo da função $\cos(\omega t)$ e, obteremos:

$$\mathcal{L}\{\text{sen}(\omega t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, s > 0. \tag{8}$$

No caso das funções cosseno e seno hiperbólicos, sabendo que podem ser representados por uma combinação de funções exponenciais, obteremos, da mesma forma, as transformadas:

$$\mathcal{L}\{\cosh(\omega t)\} = \frac{s}{s^2 - \omega^2},\ s > |w|. \tag{9}$$

$$\mathcal{L}\{\text{senh}(\omega t)\} = \frac{w}{s^2 - \omega^2},\ s > |w|. \tag{10}$$

1.2.2 A translação na transformada de Laplace

1.2.2.1 No domínio da frequência

Seja $F(s)$ a transformada de Laplace da função $f(t)$. Sabemos que, se a função $f(t)$ possuir unicidade, é válido o teorema do operador inverso de Laplace, onde $f(t)$ será chamada de transformada inversa da função $F(s)$. Entretanto, se a transformada de Laplace sofrer um deslocamento no seu argumento, para qualquer constante a, temos que, por exemplo, $F(s) = F(s-a)$, não podemos simplesmente afirmar que a transformada inversa desta função é $f(t-a)$, para chegar ao resultado correto tomamos o caminho através da definição, ou seja:

Substituindo s por $s - a$ na definição de transformada

$$F(s-a) = \int_0^{\infty} f(t)\ e^{-(s-a)t}\ dt = \int_0^{\infty} e^{-st}\ [e^{at} f(t)]\ dt$$

Com este resultado, provamos que

$$F(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.$$

E assim chegamos ao seguinte teorema

***Teorema* 1.5.**

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a). \tag{11}$$

1.2.2.2 No domínio do tempo

Neste segundo caso, iremos apresentar a situação de quando a própria função $f(t)$ sofre um deslocamento em seu argumento, ou seja, como a função está no domínio temporal, dizemos que função sofreu um adiantamento ou um atraso no tempo.

Se tivermos uma função do tipo $f(t-a)u(t-a)$, onde $u(t-a)$ é a função de Heaviside (ver equação 26). De forma análoga a demonstração anterior, vamos encontrar sua transformada de Laplace através da definição.

Com efeito, pela Definição 1, temos que $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}$ é igual a:

$$\int_0^\infty f(t-a)u(t-a)\ e^{-st}\ dt = \int_0^a (0)e^{-st}\ dt + \int_a^\infty f(t-a)\ e^{-st}\ dt.$$

Fazendo $t-a=\tau$, chegamos a

$$\int_0^\infty f(\tau)\ e^{-s(\tau+a)}\ d\tau = e^{-as}\int_0^\infty f(\tau)\ e^{-s\tau}\ d\tau.$$

Como a integral que foi encontrada já é conhecida como a definição da transformada de Laplace da função f, concluímos que

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$$

Sintetizamos isto em mais um teorema importante no estudo das transformadas:

***Teorema* 1.6.**

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s). \qquad (12)$$

1.2.3 Propriedade da escala temporal

O escalonamento temporal é outra importante propriedade para funções descritas no domínio do tempo. Faremos uma comparação entre uma função que sofreu expansão e outra que sofre compressão, analisando o comportamento a partir da constante que está sendo multiplicada no seu argumento.

Sabemos que:

- se $f(t)$ é comprimido de um fator $a>1$, a função resultante é $f(at)$;
- se $f(t)$ é expandido de um fator $a>1$, a função resultante é $f\left(\frac{t}{a}\right)$.

Pela Definição 1.1, temos que:

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)\ e^{-st}dt.$$

Fazendo a substituição $at=\tau$, temos:

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)\ e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\tau}\ dt.$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right).$$

Com este resultado, poderemos estabelecer o seguinte teorema:

***Teorema* 1.7.**

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right). \tag{13}$$

1.2.4 Diferenciação no domínio da frequência

Seja f uma função que possui transformada de Laplace. Então

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Dessa forma, derivando-se esta equação em relação a s, temos:

$$\frac{\partial}{\partial s}F(s) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}\left[f(t)\, e^{-st}\right]\, dt = \int_0^\infty -tf(t)\, e^{-st}\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}\{-t\, f(t)\},$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{-t\, f(t)\} = F'(s). \tag{14}$$

Assim, se quisermos calcular, por exemplo, a transformada da função $t\,\text{sen}(2t)$, o conhecimento dessa propriedade tornaria o processo mais simples. De fato, como temos uma função do tipo $tf(t)$ e $\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{\text{sen}(2t)\} = \dfrac{2}{s^2+4}$, temos:

$$\mathcal{L}\{t\,\text{sen}(2t)\} = -F'(s) = \frac{4s}{(s^2+4)^2}.$$

Se derivarmos a equação (14), obteremos:

$$\mathcal{L}\{t^2 f(t)\} = F''(s) \tag{15}$$

Note que com uma nova derivação, o sinal negativo não mais existe.

Assim, se quisermos encontrar a transformada de Laplace da função $t^2\,\text{sen}(2t)$, teremos que:

$$\mathcal{L}\{t^2\,\text{sen}(2t)\} = F''(s) = \frac{4(3s^2-4)}{(s^2+4)^3}.$$

De maneira natural, podemos estender este resultado à derivada de ordem n, conforme o teorema:

***Teorema* 1.8.**

$$\mathcal{L}\{t^n\, f(t)\} = (-1)^n\, \frac{\partial^n F}{\partial s^n}(s) \tag{16}$$

1.3 Transformadas de Laplace notáveis

1.3.1 Transformadas de Laplace da derivada

Seja $f \in \mathcal{F}$, tal que f' seja seccionalmente contínua. Então:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t)\ e^{-st} dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f'(t)\ e^{-st} dt$$

Integrando por partes, onde $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)dt$, teremos:

$$\lim_{b\to\infty} \left[e^{-st}\ f(t)\right]_0^b + s \int_0^b e^{-st}\ f(t)dt = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+)\ ^1 = sF(s) - f(0^+).$$

Portanto, a transformada de Laplace da derivada de primeira ordem é dada pela diferença entre o produto de s com a própria derivada de f e o valor de f em $t = 0$ e o apresentaremos como o seguinte resultado:

***Teorema* 1.9.** *Seja f um função real tal que $f \in \mathcal{F}$ e $f' \in \mathcal{F}$. Então*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+). \qquad (17)$$

Analogamente, podemos encontrar a fórmula da transformada de Laplace da segunda derivada da função $f(t)$. De fato, se $g(t) = f'(t)$, temos, $f''(t) = g'(t)$ e, de acordo com o Teorema 1.9, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g'(t)\} &= s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \\ &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\ &= s\left[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\right] - f'(0). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0). \qquad (18)$$

Da mesma forma que conseguimos encontrar as transformadas das derivadas de primeira e de segunda ordem, podemos chegar a fórmula para a derivada de ordem n da função f.

***Teorema* 1.10.** *Se $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$, são funções contínuas em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, e se $f^{(n)}(t)$ é seccionalmente contínua em $[0, \infty)$, então:*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{(n-1)} f(0) - s^{(n-2)} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0), \qquad (19)$$

em que $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

[1] 0^+ indica um valor positivo muito próximo de zero.

1.3.2 Transformada de Laplace da integral

Seja $f(t) \in \mathcal{F}$. Se $g(t) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau$, de acordo com o teorema fundamental do cálculo, $g'(t) = f(t)$.

Usemos a equação (17) para calcular a transformada de $g'(t)$:

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)$$

Sabemos que $g(0) = 0$, $g'(t) = f(t)$ e que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Dessa forma, chegaremos ao seguinte teorema:

***Teorema* 1.11.**

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}. \tag{20}$$

1.3.3 Integral da transformada de Laplace

Assim como calculamos a derivada da transformada de Laplace, também é possível encontrar a integral.

Supondo que $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma$.

Mas

$$\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma = \int_s^\infty \left[\int_0^\infty f(t)\, e^{-\sigma t}\, dt\right]\, d\sigma. \tag{21}$$

A integral no segundo membro de (21) pode ter seus limites de integração invertidos devido a que o produto de funções contínuas é uma função contínua, então de acordo com o Teorema de Fubini, a integral ficará da seguinte maneira:

$$\int_0^\infty \left[\int_s^\infty f(t)\, e^{-\sigma t}\, d\sigma\right] \mathrm{d}t = \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-\sigma t}\, d\sigma\right]\, dt.$$

Como

$$\left[\int_s^\infty e^{-\sigma t}\, d\sigma\right]\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{t}\right],$$

temos:

$$\int_0^\infty f(t)\, \left[\frac{e^{-st}}{t}\right]\, dt = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.$$

O que acabamos de mostrar foi:

***Teorema* 1.12.** *Dado uma função $f(t) \in \mathcal{F}$,*

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma, \tag{22}$$

desde que $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ exista.

1.3.4 Transformada da convolução

A convolução é um operador linear que é muito utilizado em estruturas algébricas. Tal operador trabalha a partir de duas funções que resulta numa terceira, que mede a área gerada pela superposição das mesmas em função do deslocamento existente entre elas.

***Definição* 1.5.** *A convolução de duas funções $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é uma função dada por:*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{23}$$

A convolução possui propriedades parecidas com as da multiplicação, uma delas é a comutatividade, se fizermos uma mudança de variável na integral, provaremos essa propriedade, substituindo $u = t - \tau$ na equação (23), temos:

$$(f * g)(t) = -\int_t^0 f(t-u)g(u)\ du = \int_0^t f(t-u)g(u)\ du = (g * f)(t)$$

Dessa forma, temos que o produto convolução de $(f * g)(t)$ é igual a $(g * f)(t)$, a seguir, algumas propriedades de convolução:

1. $(f * g)(t) = (g * f)(t)$
2. $f * (g + h)(t) = (f * g + f * h)(t)$
3. $f * (kg)(t) = k(f * g)(t),\ \forall\ k \in \mathbb{R}$
4. $(f * 0)(t) = (0 * f)(t) = 0$

Para calcularmos a transformada de Laplace da convolução entre duas funções, basta aplicar a definição:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau\right] dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau dt$$

Para resolver esta integral, teremos que inverter os limites de integração, como vimos anteriormente, isso se torna possível devido a continuidade das funções que estão sendo integradas.

Dessa maneira:

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\ d\tau\ dt = \int_0^\infty \int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau)g(t-\tau)\ dt\ d\tau$$

Fazendo a seguinte mudança de variável, $\psi = t - \tau$:

$$\int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-s(\tau+\psi)} g(\psi)\ d\psi\ d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\ e^{-s\tau}\ d\tau \int_\tau^\infty e^{-s\psi} g(\psi)\ d\psi$$

Assim,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{g(t)\} = F(s)G(s)$$

***Teorema* 1.13.** *Se f e g são funções seccionalmente contínuas e de ordem exponencial, então a transformada da convolução $(f * g)(t)$ existe e é dada por:*

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s). \tag{24}$$

Consequentemente, é valida também a propriedade da transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = (f * g)(t). \tag{25}$$

1.3.5 Transformada de Laplace do delta de Dirac

1.3.5.1 Função Degrau Unitário

A função **degrau unitário** ou função **de Heaviside** deslocada de um valor real a, $u(t-a)$ é definida por:

$$u(t-a) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } t < a \\ 1 & , \quad \text{se } t \geq a \end{cases} \tag{26}$$

que tem valor 0, para $t < a$ e apresenta o salto de tamanho 1, em $t = a$ e tem valor 1, para $t \geq a$:

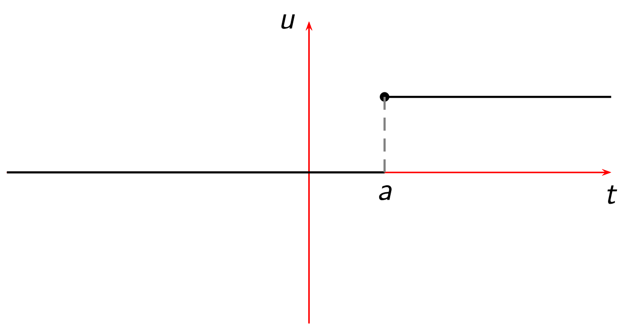

Figura 3 – Função degrau unitário

Utilizando a definição e os demais processos do cálculo integral, temos:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \int_0^\infty u(t-a)\ e^{-st}\ dt = \int_a^\infty 1\ e^{-st}\ dt = -\frac{e^{-st}}{s}\bigg|_a^\infty$$

Logo,

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}, \;\; Re(s) > 0.$$

E assim, temos:

***Proposição* 1.4.** *A transformada de Laplace da função* $u(t-a)$ *é* $\dfrac{e^{-as}}{s}$, $Re(s) > 0$.

1.3.5.2 A Função Delta de Dirac

Considere a função real d_ϵ de variável real, definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} d_\epsilon : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto d_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & , \;\; t < 0 \\ \frac{t}{\epsilon} & , \;\; 0 \leq t < \epsilon \\ 1 & , \;\; t \geq \epsilon \end{cases} \end{aligned}$$

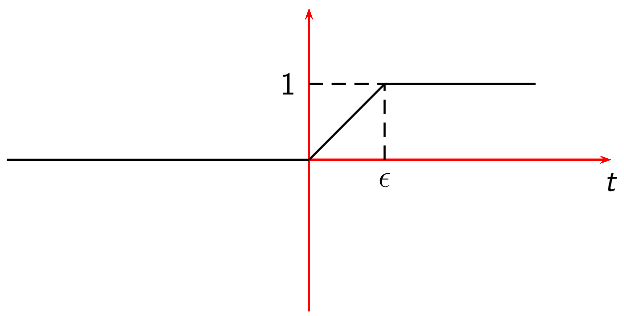

Figura 4 – Função delta de Dirac

Observe:

1. pelo gráfico, que quando $\epsilon \rightarrow 0$, temos $d_\epsilon(t) \rightarrow 1(t)$;
2. a derivada em t da função $d_\epsilon(t)$ é $\frac{1}{\epsilon}$, se $t \in [0, \epsilon[$ e zero para os valores de t no complementar deste intervalo;
3. a área da região limitada pelo gráfico da derivada da função $d_\epsilon(t)$ e o eixo horizontal é igual a 1.

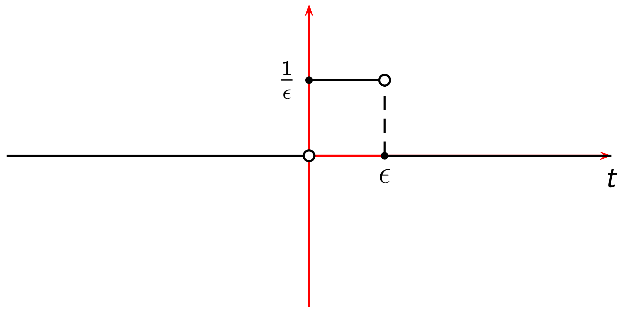

Figura 5 – Derivada da função delta de Dirac

A função delta de Dirac δ é obtida da seguinte forma:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} d'_\epsilon(t).$$

1.3.5.3 Propriedades do Delta de Dirac

1. A derivada do degrau unitário é igual a função delta de Dirac.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0)dt = 1, \forall \epsilon > 0.$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau-t_0)d\tau = \begin{cases} 0 & , \quad t < t_0 \\ 1 & , \quad t \geq t_0 \end{cases}$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$, desde que f seja contínua em t_0.

Para provar essa última propriedade, vamos recorrer ao teorema do valor médio. Como podemos encontrar em (LIMA, 1993):

***Teorema* 1.14.** *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Seja $F(t)$ uma função derivável em $I \subset \mathbb{R}$ e cuja derivada $F'(t) = f(t)$ seja contínua em $t_0 \in I$.

Pelo teorema do valor médio, temos que, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $\xi \in [t_0, t_0+\epsilon]$,

$$F'(\xi) = \frac{F(t_0+\epsilon) - F(t_0)}{\epsilon}.$$

Como $F'(\xi) = f(\xi)$, $\frac{1}{\epsilon} = d'_\epsilon(t-t_0)$ e $F(t_0+\epsilon) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} f(t)dt$, temos que

$$f(\xi) = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon} d'_\epsilon(t-t_0)f(t)dt.$$

Segue que

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(\xi) = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{t_0}^{t_0+\epsilon} d'_\epsilon(t-t_0)f(t)dt. = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon}[\lim_{\epsilon\to 0} d'_\epsilon(t-t_0)]f(t)dt. = \int_{t_0}^{t_0+\epsilon}\delta(t-t_0)f(t)dt.$$

Como $\lim_{\epsilon\to 0} f(\xi) = f(t_0)$, temos que:

$$\int_{t_0}^{t_0+\epsilon}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0).$$

Como a função Delta de Dirac terá um valor nulo em qualquer instante t não pertencente ao intervalo $[t_0, t_0+\epsilon]$, podemos expandir essa definição para:

$$\int_{0}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt = f(t_0). \tag{27}$$

Esta propriedade da função Delta de Dirac será importante para podermos chegar a uma definição da sua transformada de Laplace.

1.3.5.4 A Transformada de Laplace da Função Delta de Dirac

Se substituirmos a função $f(t)$ da equação (27) por e^{-st} notaremos que a forma da integral ficará idêntica a definição já conhecida da transformada de Laplace, portanto, utilizando a propriedade mostrada e demonstrada no item anterior, poderemos facilmente calcular a transformada de Laplace do delta de dirac. Fazendo $t_0 = a$, temos que:

$$\int_{0}^{\infty}\delta(t-a)\, e^{-st}dt = e^{-as}. \tag{28}$$

ou seja, $\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = e^{-as}$

Note que se $a = 0$, temos que $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$.

1.4 Tabelas de algumas importantes transformadas de Laplace

Nesta seção, iremos apresentar tabelas que servem como auxiliares para a resolução de EDO utilizando a transformada de Laplace.

Alguns destes resultados foram demonstrados neste trabalho, utilizando o método estudado até então para a resolução da transformada, que é chamado de método direto, ou seja, quando aplica-se a definição da transformada (ver equação (1)) para solucionar o problema. Sabemos entretanto que é possível encontrar a transformada através de outros métodos não abordados neste trabalho.

Tabela 1 – Propriedades da Transformada

1	Linearidade	$\mathcal{L}\{f(t)+ag(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + a\mathcal{L}\{h(t)\}$
2	Transformada da derivada	$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0)$ $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$
3	Transformada da integral	$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$
4	Translação na frequência	$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
5	Translação no tempo	$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$
6	Integral da transformada	$\mathcal{L}\left\{\dfrac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma$
7	Mudança de escala	$\mathcal{L}\{f(at)\} = \dfrac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), a > 0$
8	Derivada da transformada	$\mathcal{L}\{-t\, f(t)\} = F'(s)$
9	Transformada da convolução	$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$

A tabela a seguir será constituída por algumas transformadas de Laplace de variadas funções que serão importantes no prosseguimento deste seguinte trabalho.

Tabela 2 – Transformadas de Laplace

	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$	$f(t), t > 0$
1	1	$\delta(t)$
2	$\dfrac{1}{s}$	1 ou $u(t)$
3	$\dfrac{1}{s^2}$	t
4	$\dfrac{1}{s^n}, n = 1, 2, \ldots$	$\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
5	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
6	$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
7	$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}

8	$\frac{1}{(s-a)^n}$, $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
9	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$, $a \neq b$	$\frac{1}{(a-b)}(e^{at} - e^{bt})$
10	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$, $a \neq b$	$\frac{1}{(a-b)}(ae^{at} - be^{bt})$
11	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\operatorname{sen}(\omega t)$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t)$
13	$\frac{1}{(s-a)^2+\omega^2}$	$\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)$
14	$\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}$	$e^{at}\cos(\omega t)$
15	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{1}{a}\operatorname{senh}(at)$
16	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$

2

Soluções de equações diferenciais utilizando as transformadas de Laplace

Uma grande utilidade do método das transformadas de Laplace é sua capacidade de ser aplicado a solução de EDO, especialmente as que possuem coeficientes constantes e as de problemas de valor inicial (PVI). Apesar dos métodos analíticos de resolução serem bastante utilizados, como por exemplo o método dos coeficientes indeterminados, método de d'Alembert ou método da variação de parâmetros, resolver uma EDO utilizando o método da transformada de Laplace é uma ferramenta muito eficiente, pois transforma uma equação diferencial em uma simples equação algébrica. Utilizando o teorema da transformada das derivadas de ordem n, que foi estudado no capítulo anterior, podemos resolver facilmente problemas de valor inicial, devido as suas condições de contorno serem inseridas diretamente na resolução da EDO de qualquer ordem.

A importância desse método de resolução para EDO se deve ao fato de que podemos aplicar à várias áreas, principalmente na engenharia. Como podemos ver em (KATSUHIKO, 2011), que fala que a dinâmica de muitos sistemas mecânicos, elétricos, térmicos, econômicos, biológicos ou outros, os quais podem ser descritos em termos de equações diferenciais. Estas, são obtidas pelas leis físicas que regem dado sistema, por exemplo, as leis de Newton para sistemas mecânicos e as leis de Kirchhoff para sistemas elétricos.

Um exemplo que pode ser apresentado sobre a aplicação da transformada de Laplace no ramo da engenharia de controle é o das funções de transferência, muito utilizadas para caracterizar as relações de entrada e saída de componentes ou de sistemas que podem ser descritos por equações diferenciais lineares invariantes no tempo. A função de transferência de um sistema dinâmico, como um sistema elétrico por exemplo, é importante para podermos visualizar o entendimento da natureza do sistema. Fazendo a modelagem através das leis de Kirchhoff, é possível encontrar a equação diferencial que descreve o sistema, e utilizando o método de Laplace para resolvê-las, como será mostrado a seguir, a desejada função de transferência do sistema pode ser encontrada, transformando a equação diferencial em uma equação algébrica.

2.1 Aplicação da transformada de Laplace na solução de EDO lineares com coeficientes constantes

Uma **EDO linear** de ordem n é toda equação que pode ser escrita como:

***Definição* 2.1.**

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + p_1(t)y' + p_0(t)y = q(t), \tag{29}$$

onde, $p_0, p_1, \ldots, p_n$, são funções reais e contínuas em algum intervalo $I = (a, b) \in \mathbb{R}$, y e t ditas variáveis dependentes e independentes, respectivamente.

Um Problema de Valor Inicial (PVI) de uma equação de ordem n possui n condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{n-1}(t_0) = y_0^{n-1}. \tag{30}$$

Neste capítulo, abordaremos, essencialmente, PVI, em que seus coeficientes são constantes.

Outro importante fato a se destacar é: quando $q(t) = 0$ em (29), a EDO é chamada de **homogênea**, caso contrário a equação é dita **não-homogênea**. Dessa forma, teremos:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = q(t), \tag{31}$$

em que $a_0, a_1, \ldots, a_n$, são constantes reais, com $a_0 \neq 0$.

Apesar da abordagem aqui feita, devido as equações diferencias com coeficientes constantes serem mais aplicáveis a sistemas reais, a transformada de Laplace também pode ser usada no processo de resolução de EDO com coeficientes não constantes.

Uma particular equação diferencial, onde o método é útil, tem os termos na seguinte forma:

$$t^nY^{(n)}(t). \tag{32}$$

cuja transformada de Laplace é:

$$(-1)^m\frac{\partial^m}{\partial s^m}\mathcal{L}\{Y^{(n)(t)}\}. \tag{33}$$

Para detalhes da resolução, ver (SPIEGEL, 1965).

2.1.1 EDO linear homogênea de primeira ordem

Vários problemas que encontramos no nosso cotidiano podem ser modelados por equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, como a dinâmica populacional, capitalização de juros e também, áreas da física como a transferência de calor e massa que trabalha com equações como a lei de Fourier para condução de calor:

$$Q = -kA\frac{\partial T}{\partial x}. \tag{34}$$

Por ser uma EDO do tipo separável [1], dada uma condição inicial, pode-se facilmente encontrar uma solução $T(x)$ para a equação (34).

Quando se tem uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem o processo não é tão simples, e a transformada de Laplace é uma das ferramentas usadas para solucionar esse tipo de problema.

Considere a EDO linear de primeira ordem homogênea:

$$a_1y'(t) + a_0y(t) = 0, \tag{35}$$

em que a_1 é um número real não nulo, a_0 é um número real qualquer e seja $y(0) = C$ sua condição inicial.

Para encontrar a sua solução, vamos, inicialmente, aplicar o operador de Laplace

$$\mathcal{L}\{a_1y'(t) + a_0y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

Pelo Teorema 1.4,

$$a_1\mathcal{L}\{y'(t)\} + a_0\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

e, de acordo com o Teorema 1.9:

$$a_1\left[sY(s) - y(0)\right] + a_0Y(s) = 0.$$

Explicitando $Y(s)$, temos:

$$Y(s) = \frac{a_1C}{a_1s + a_0}.$$

Sendo $a_1 \neq 0$, manipulando a equação:

[1] Uma equação diferencial é dita separável ou de variáveis separáveis se pode ser escrita na forma: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{h(x)}{g(y)}$. Para resolvermos uma equação diferencial separável, basta separarmos as variáveis e em seguida integramos ambos os membros.

$$Y(s) = \frac{C}{s + \dfrac{a_0}{a_1}} = C\frac{1}{s - \left[-\dfrac{a_0}{a_1}\right]}$$

Aplicando agora o teorema da transformada inversa de Laplace (2), e sendo essa transformada já calculada anteriormente, temos que a função $y(t)$ desejada é igual a:

$$y(t) = Ce^{-\frac{a_0}{a_1}t}. \tag{36}$$

2.1.2 EDO linear homogênea de segunda ordem

Diferentemente da EDO linear homogênea de ordem 1 (coeficientes constantes) que possui apenas uma solução geral possível, na qual só diferem os valores dos seus coeficientes e as condições iniciais do problema, a de ordem 2 apresenta três possíveis soluções.

Iremos trabalhar com uma EDO linear homogênea genérica, para realizar um estudo desses três casos possíveis.

Dada a seguinte equação:

$$a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t) = 0. \tag{37}$$

Sejam $y(0) = C$ e $y'(0) = C_1$ suas condições iniciais, onde a_2 é um número real não nulo e a_1 e a_0 são números reais quaisquer.

Para encontrar a solução de uma equação desse tipo utilizando as transformadas, aplicaremos o operador de Laplace:

$$\mathcal{L}\{a_2y''(t) + a_1y'(t) + a_0y(t)\} = \mathcal{L}\{0\}$$

De acordo com a propriedade (4), temos:

$$a_2\mathcal{L}\{y''(t)\} + a_1\mathcal{L}\{y'(t)\} + a_0\mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{0\},$$

E pelo Teorema 1.10,

$$a_2\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] + a_1\left[sY(s) - y(0)\right] + a_0Y(s) = 0.$$

Explicitando $Y(s)$, temos:

$$Y(s) = \frac{a_2sC + a_2C_1 + a_1C}{a_2s^2 + a_1s + a_0}.$$

Dividindo-se o numerador e o denominador da fração acima por $a_2 \neq 0$, obtemos:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C}{s^2 + \dfrac{a_1}{a_2}s + \dfrac{a_0}{a_2}}. \tag{38}$$

Com o intuito de obter uma expressão mais conveniente para o cálculo da transformada inversa de Laplace de (38) vamos realizar as seguintes manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} &= s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2} \\ &= \left[s + \frac{a_1}{2a_2}\right]^2 - \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 + \frac{a_0}{a_2} \\ &= \left[s + \frac{a_1}{2a_2}\right]^2 - \left[\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}\right] \\ &= \left[s + \frac{a_1}{2a_2}\right]^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right]^2. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$s^2 + \frac{a_1}{a_2}s + \frac{a_0}{a_2} = \left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right)\right]\left[s - \left(-\frac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}\right)\right].$$

Portanto,

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C}{\left[s - \left(-\dfrac{a_1}{2a_2} - \sqrt{\left(\dfrac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \dfrac{a_0}{a_2}}\right)\right]\left[s - \left(-\dfrac{a_1}{2a_2} + \sqrt{\left(\dfrac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \dfrac{a_0}{a_2}}\right)\right]} \tag{39}$$

Fazendo $\alpha = \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}}$ e $\omega = -\frac{a_1}{2a_2}$, a equação (39) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C}{[s - (\omega - \alpha)]\,[s - (\omega + \alpha)]}. \tag{40}$$

Para determinarmos $y(t)$, devemos realizar um estudo de casos observando os possíveis valores de

$$\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2}.$$

Caso 1: $\left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \frac{a_0}{a_2} = 0$.

A equação (40) para $\alpha = 0$ é:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C}{[s-\omega]^2}. \tag{41}$$

Adicionando e subtraindo o termo ωC no numerador da expressão em (41), temos:

$$Y(s) = \frac{sC - \omega C + \omega C + C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C}{[s-\omega]^2} = \frac{sC - \omega C}{[s-\omega]^2} + \frac{\omega C + C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C}{[s-\omega]^2}$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$Y(s) = \underbrace{C}_{k_1}\frac{1}{s-\omega} + \underbrace{\left[C_1 + C\left(\omega + \frac{a_1}{a_2}\right)\right]}_{k_2}\frac{1}{[s-\omega]^2}$$

De acordo com a tabela (2) e as propriedades da transformada de Laplace, temos:

$$y(t) = k_1 e^{\omega t} + k_2 t e^{\omega t}. \tag{42}$$

Caso 2: $\left(\dfrac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \dfrac{a_0}{a_2} > 0.$

Podemos, através de manipulações algébricas, reescrever a equação (40):

$$Y(s) = C\frac{s}{[s-(\omega-\alpha)]\,[s-(\omega+\alpha)]} + \left[C_1 + \frac{a_1}{a_2}C\right]\frac{1}{[s-(\omega-\alpha)]\,[s-(\omega+\alpha)]}.$$

Aplicando a transformada inversa com o auxílio da tabela (2), encontramos:

$$y(t) = C\frac{e^{(\omega+\alpha)t} - e^{(\omega-\alpha)t}}{(\omega+\alpha)-(\omega-\alpha)} + \left[C_1 + \frac{a_1}{a_2}C\right]\frac{(\omega+\alpha)e^{(\omega+\alpha)t} - (\omega-\alpha)e^{(\omega-\alpha)t}}{(\omega+\alpha)-(\omega-\alpha)},$$

ou seja,

$$y(t) = \underbrace{\frac{\left[C + \left[C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C\right](\omega+\alpha)\right]}{2\alpha}}_{k_1} e^{(\omega+\alpha)t} + \underbrace{\frac{\left[-C - \left[C_1 + \dfrac{a_1}{a_2}C\right](\omega-\alpha)\right]}{2\alpha}}_{k_2} e^{(\omega-\alpha)t}$$

Portando, a solução geral $y(t)$ para este caso é dada por:

$$y(t) = k_1 e^{(\omega+\alpha)t} + k_2 e^{(\omega-\alpha)t} \tag{43}$$

Caso 3: $\left(\dfrac{a_1}{2a_2}\right)^2 - \dfrac{a_0}{a_2} < 0$

Neste caso, devido a expressão no interior do radicando ser um número menor que zero, as raízes da equação terão uma parte real e outra imaginária. Portanto, $(\omega - \alpha i)$ e $(\omega + \alpha i)$ são as raízes.

Reescrevendo a equação (40) da seguinte maneira:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + \frac{a_1}{a_2}C}{[s - (\omega - \alpha i)]\,[s - (\omega + \alpha i)]} = \frac{sC + C_1 + \frac{a_1}{a_2}C}{s^2 - 2\omega s + (\omega^2 + \alpha^2)}$$

Adicionando e subtraindo o termo ωC no numerador e completando quadrado no denominador, obtém-se:

$$Y(s) = \frac{sC + C_1 + \frac{a_1}{a_2}C}{(s-\omega)^2 + \alpha^2} = \frac{sC - \omega C + \omega C + C_1 + \frac{a_1}{a_2}C}{(s-\omega)^2 + \alpha^2},$$

que pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$Y(s) = C\frac{s - \omega}{(s-\omega)^2 + \alpha^2} + \left[C\left(\omega + \frac{a_1}{a_2}\right) + C_1\right]\frac{1}{(s-\omega)^2 + \alpha^2}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace com o auxílio da tabela (2), temos:

$$y(t) = \underbrace{C}_{k_1} e^{\omega t}\cos(\alpha t) + \underbrace{\left[C\left(\omega + \frac{a_1}{a_2}\right) + C_1\right]\frac{1}{\alpha}}_{k_2} e^{\omega t}\,\mathrm{sen}(\alpha t)$$

Portando, a solução geral $y(t)$ para este caso é dada por:

$$y(t) = k_1 e^{\omega t}\cos(\alpha t) + k_2 e^{\omega t}\,\mathrm{sen}(\alpha t) \tag{44}$$

Para os casos aqui estudados, as constantes k_1 e k_2 podem ser encontradas se os valores de $y(0)$ e $y'(0)$ forem conhecidos.

2.1.3 EDO linear homogênea de ordem superior

A transformada de Laplace também pode ser usada para resolver EDO homogênea de ordem superior. O procedimento é análogo, e apenas necessitamos do Teorema 1.10 para determinar as transformadas de derivadas de ordens maiores.

Vamos mostrar isso resolvendo o seguinte problema adaptado de (SILVA, 2005), onde desejamos encontrar a solução de

$$y''' + y' = 0$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} y(0) & = & C \\ y'(0) & = & C_1 \\ y''(0) & = & C_2 \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 1.10, tem-se:

$$\left[s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0)\right] + [sY(s) - y(0)] = 0$$

Evidenciando o termo $F(s)$, obtém-se:

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s^2C + sC_1 + C_2 + C}{s^3 + s} \\ &= \frac{s^2C + sC_1 + C_2 + C}{s(s^2+1)} \\ &= \frac{C}{s} + \frac{C_1}{s^2+1} + \frac{C_2}{s(s^2+1)} \\ &= \frac{C}{s} + \frac{C_1}{s^2+1} + \frac{C_2}{s} - \frac{C_2 s}{s^2+1} \end{aligned}$$

Como essas transformadas já foram calculadas anteriormente (ver equações em (8) e (7)), obtemos:

$$y(t) = \underbrace{C_1}_{k_1}\operatorname{sen}(t) \underbrace{-C_2}_{k_2}\cos(t) + \underbrace{(C + C_1)}_{k_3},$$

Logo, a solução é dada por:

$$y(t) = k_1 \operatorname{sen}(t) + k_2 \cos(t) + k_3 \tag{45}$$

2.1.4 EDO linear não homogênea

De maneira análoga a utilizada para calcular a solução de equações diferenciais homogêneas, pode-se encontrar facilmente a solução de equações não homogêneas, isto é, equações onde a função $q(t)$ da equação (31) é diferente de zero, o processo de obtenção dessa solução é semelhante. Iremos apenas apresentar alguns exemplos de funções deste tipo e solucioná-los.

2.1.4.1 EDO linear não homogênea de primeira ordem

Equações desse tipo possui diversas aplicações nos sistemas reais, uma delas, é no circuito elétrico simples em série, com apenas resistores, indutores e uma fonte de tensão alternada senoidal, onde, através da modelagem do sistema, pode-se determinar a função que rege a corrente $i(t)$ do circuito a partir de uma EDO linear não homogênea de ordem 1.

Para exemplificar a resolução de uma EDO desse tipo, considere o seguinte problema de valor inicial:

$$y'(t) + y(t) = e^{-t} \text{ e } y(0) = 5.$$

Aplicando-se a transformada de Laplace e como esta é linear (ver Teorema 1.4), temos:

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{e^{-t}\}$$

A partir da consulta das tabelas (1) e (2), tem-se que:

$$[sY(s) - y(0)] + Y(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Evidenciando $Y(s)$ na equação acima, substituindo as condições iniciais e reorganizando de maneira conveniente:

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + 5\frac{1}{s+1}$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, utilizando a tabela (2), temos:

$$y(t) = te^{-t} + 5e^{-t}. \tag{46}$$

2.1.4.2 EDO linear não homogênea de segunda ordem

Assim como no caso anterior, a EDO não homogênea de ordem 2 possui diversas aplicações. Um sistema mecânico massa-mola e um circuito elétrico RLC, podem ser modelados por equações desse tipo. A resolução através do método de Laplace é análoga aos problemas vistos anteriormente.

Para exemplificar, segue a resolução do seguinte PVI:

$$y''(t) - 2y'(t) - 3y(t) = 6e^t, \; y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 3.$$

Aplicando a transformada de Laplace e utilizando o Teorema 1.4,

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} - 2\mathcal{L}\{y'(t)\} + 3\mathcal{L}\{y(t)\} = 6\mathcal{L}\{e^t\}.$$

A partir da tabela (1), tem-se que:

$$\left[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\right] - 2\left[sY(s) - y(0)\right] + 3Y(s) = 6\frac{1}{s-1}.$$

Isolando $Y(s)$ na expressão acima, substituindo as condições iniciais e rearrumando de modo adequado, obtemos:

$$Y(s) = \frac{6}{(s-1)(s+1)(s-3)} + \frac{1}{(s+1)(s-3)}$$

Separando as equações por frações parciais, obtém-se:

$$Y(s) = \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{3}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{7}{4}\frac{1}{s-3}.$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, utilizando a tabela (2):

$$y(t) = \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{7}{4}e^{3t}. \tag{47}$$

2.1.4.3 EDO linear não homogênea de ordem superior

Assim como em casos anteriores, a transformada de Laplace também pode ser aplicada a resolução de EDO não homogênea de ordem superior, para exemplificar a resolução de uma equação deste tipo, iremos solucionar um exercício proposto no capítulo 3 de (SPIEGEL, 1965), página 134, no qual busca-se encontrar a solução da seguinte EDO.

$$y^4(t) + 2y''(t) + y(t) = \text{sen}(t)$$

Considerando todas as condições iniciais iguais a zero e aplicando-se a transformada de Laplace, temos:

$$\mathcal{L}\{y^{iv}(t)\} + 2\mathcal{L}\{y''(t)\} + \mathcal{L}\{y(t)\} = \mathcal{L}\{\text{sen}(t)\}.$$

Com auxílio das tabelas (1) e (2), obtemos:

$$[s^4Y(s) - s^3y(0) - s^2y'(0) - sy''(0) - y'''(0)] + 2[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Substituindo as condições inicias do problema,

$$s^4Y(s) + 2s^2Y(s) + Y(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Explicitando $Y(s)$,

$$\begin{aligned} (s^4 + 2s^2 + 1)Y(s) &= \frac{1}{s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{(s^2+1)(s^4+2s^2+1)} = \frac{1}{(s^2+1)^3}. \end{aligned}$$

Aplicando a transformada de Laplace inversa, com o auxílio da Tabela 2,

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{-t}t^2.$$

3

Circuitos elétricos

Um circuito elétrico (ou sistema elétrico) é basicamente uma interconexão de elementos elétricos, de modo que formem pelo menos um caminho fechado para a corrente. O funcionamento de diversos equipamentos elétricos depende dele.

Os principais elementos de um circuito elétrico são:

1. **Resistores**: Dispositivos elétricos com a finalidade básica de transformar energia elétrica em calor (efeito joule). Outra função é a possibilidade de alterar a diferença de potencial em determinada parte do circuito, isso ocorre por conta da diminuição da corrente elétrica devido à presença do equipamento. Sua unidade de medida é o Ohm (Ω).

Figura 6 – Resistores

2. **Capacitores**: Este equipamento é capaz de armazenar energia potencial elétrica durante um intervalo de tempo, ele é construído utilizando um campo elétrico uniforme. Um capacitor é composto por duas peças condutoras, chamadas armaduras e um material isolante com propriedades específicas chamado dielétrico. Sua unidade de medida é o Farad (F).

Figura 7 – Capacitores

3. **Indutores**: O indutor, também conhecido por bobina, é um elemento usado em circuitos elétricos, eletrônicos e digitais com a função de acumular energia através de um campo magnético, também serve para impedir variações na corrente elétrica. São usados, também, para formar um transformador, além de ser extensamente utilizados como filtro do tipo passa baixa (que exclui sinais de alta frequência). Sua unidade de medida é o Henry (H).

Figura 8 – Indutores

4. **Diodos**: Componente elétrico que permite que a corrente atravesse-o num sentido com muito mais facilidade do que no outro.

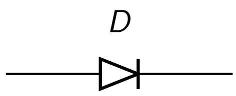

Figura 9 – Diodo

5. **Fontes de tensão**: Uma fonte de tensão ou gerador de tensão é qualquer dispositivo ou sistema que gere uma força eletromotiva entre seus terminais.

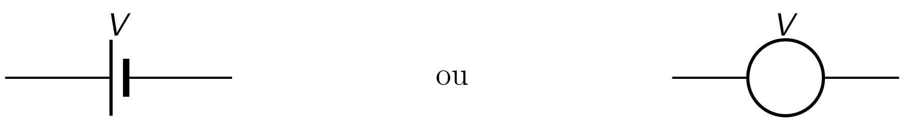

Figura 10 – Fontes de tensão

Podemos ter circuitos elétricos compostos por diversos componentes que são utilizados para as mais variadas finalidades. Neste trabalho, iremos estudar um pouco sobre os circuitos elétricos RLC, que são circuitos formados basicamente por resistores, capacitores e indutores conectados em série ou em paralelo e que são alimentados por fonte de tensão. Outra grande vantagem dos circuitos RLC é que qualquer tensão ou corrente nele pode ser descrita por uma EDO de segunda ordem.

Tendo o domínio de como obter a transformada de Laplace de uma função e sua inversa, podemos aplicá-la na análise de circuitos elétricos RLC, devido a relativa facilidade quando nos encontramos no domínio da frequência s, complexa. Transformamos equações complicadas que envolvem derivadas e até integrais em equações algébricas.

Analisar os circuitos no domínio de s, pode nos ajudar a entender como os circuitos e sistemas realmente funcionam. Veremos, superficialmente, o conceito de função de transferência, como as variáveis de estado podem ser usadas para analisar sistemas com diversas entradas e saídas.

3.1 Elementos de um circuito RLC no domínio da frequência

O procedimento para obter um circuito equivalente no domínio da frequência para cada elementos de circuito é simples. Em primeiro lugar, escrevemos a equação que relaciona a tensão terminal à corrente terminal no domínio do tempo. Em seguida, tomamos a transformada de Laplace dessa equação (NILSSON; RIEDEL, 2008).

1. **Resistor**

   De acordo com a lei de Ohm, a equação que relaciona a tensão V e a corrente i que passa sobre um resistor R é:

   $$V = Ri. \tag{48}$$

   Como R é constante, a transformada de Laplace de (48) é igual a:

   $$\mathcal{L}\{V\} = R\mathcal{L}\{i\}$$

   Sendo assim,

   $$V(s) = RI(s). \tag{49}$$

2. **Capacitor**

   Dada a equação da corrente I em um capacitor, com capacitância igual a C:

   $$i(t) = C\frac{d}{dt}(v(t)).$$

   Aplicando a transformada de Laplace,

   $$I(s) = C[sV(s) - v(0^+)] = sCV(s) - Cv(0^+).$$

   $$V(s) = \frac{1}{sC}I(s) + \frac{v(0^+)}{s}. \tag{50}$$

3. **Indutor**

   Dada a equação que relaciona tensão V e a corrente I em um indutor, com indutância igual a L:
$$V(t) = L\frac{d}{dt}(i(t)).$$
   Aplicando a transformada de Laplace,
$$V(s) = L[sI(s) - i(0^-)] = sLI(s) - Li(0^-).$$

$$I(s) = \frac{1}{sL}V(s) + \frac{i(0^-)}{s} \tag{51}$$

Sabemos que, se não houver nenhuma energia armazenada no indutor ou capacitor, a relação entre tensão e corrente pode ser escrita na forma:

$$V(s) = ZI, \tag{52}$$

onde $Z(s)$ é chamado de impedância do elemento no domínio da frequência e é medida em Ω.

A equação (52) é chamada de lei de Ohm no domínio da frequência s.

Desse modo, a impedância no domínio s é a razão entre a transformada da tensão e da e a transformada da corrente. Se considerarmos as condições iniciais iguais a zero nas equações (50) e (51):
$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}.$$

As impedâncias dos três elementos de circuitos são:

- Resistor: $Z(s) = R$.
- Indutor: $Z(s) = sL$.
- Capacitor: $Z(s) = \frac{1}{sC}$.

3.2 Análise de circuitos no domínio da frequência

Para analisar um circuito no domínio da frequência, deve-se encontrar um circuito equivalente no qual transformamos os elementos de circuito do domínio do tempo para o da frequência. Este procedimento irá nos auxiliar no processo de solução de um circuito elétrico, como por exemplo o descobrimento de uma tensão ou corrente, e também na obtenção de uma função de transferência para o circuito.

A partir do exemplo proposto em (ALEXANDER; SADIKU, 2013), iremos mostrar como podemos transformar o circuito do domínio do tempo para o da frequência e encontrar o valor de $v_0(t)$ supondo condições iniciais iguais a zero.

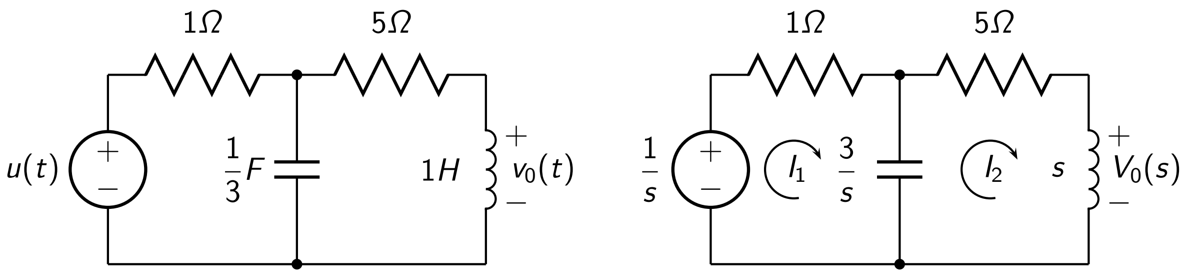

Figura 11 – Circuitos Elétricos RLC

Utilizando a transformada de Laplace da função degrau unitário $u(t)$ como visto em (1.4) e de acordo com as equações (50) e (51):

$$
\begin{aligned}
u(t) &\Rightarrow \frac{1}{s} \\
1H &\Rightarrow sL = s \\
\frac{1}{3}F &\Rightarrow \frac{1}{sC} = \frac{3}{s}.
\end{aligned}
$$

De acordo com a lei de Kirchhoff das malhas, quando se percorre um circuito fechado, o somatório das quedas de potencial deve ser nulo, pois os pontos inicial e final são os mesmos. Portanto, para malha 1 do circuito no domínio da frequência da Figura 11, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) I_1 - \frac{3}{s} I_2. \tag{53}$$

Para a malha 2:

$$0 = -\frac{3}{s} I_1 + \left(s + 5 + \frac{3}{s}\right) I_2.$$

$$I_1 = \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3) I_2. \tag{54}$$

Substituindo na equação (53):

$$\frac{1}{s} = \left(1 + \frac{3}{s}\right) \frac{1}{3}(s^2 + 5s + 3) I_2 - \frac{3}{s} I_2.$$

Simplificando a expressão para explicitar I_2:

$$I_2 = \frac{3}{s^3 + 8s^2 + 18s}.$$

De acordo com a equação (52):

$$V_0(s) = sI_2 = \frac{3}{s^2 + 8s + 18} = \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s+4)^2 + (\sqrt{2})^2}.$$

Utilizando a transformada inversa de Laplace a partir da tabela (2):

$$v_0(t) = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-4t} \operatorname{sen}(\sqrt{2}t)\ V. \tag{55}$$

3.2.1 Função de transferência

O conhecimento da função de transferência de dado circuito permite visualizar o comportamento da saída em relação a entrada, sendo uma ferramenta ideal para encontrar respostas de circuitos, determinação da estabilidade de circuitos e da síntese de circuitos (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Função de transferência:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{Z(s)},$$

onde $Y(s)$ representa a saída do sistema e $Z(s)$ a sua entrada.

Em um circuito elétrico RLC podemos encontrar vários tipos de função de transferência. Teremos quatro possibilidades:

1. $H(s) = \dfrac{V_0(s)}{V_i(s)}$ (Ganho de tensão).
2. $H(s) = \dfrac{I_0(s)}{I_i(s)}$ (Ganho de corrente).
3. $H(s) = \dfrac{V(s)}{I(s)}$ (Impedância).
4. $H(s) = \dfrac{I(s)}{V(s)}$ (Admitância).

A seguir, será mostrado como encontrar uma função de transferência de um dado circuito elétrico RLC utilizando técnicas de análise de circuitos. Dado o circuito da figura abaixo, com a impedância de cada componente já descrita no domínio da frequência, iremos determinar a função de transferência entre a tensão de entrada e tensão no capacitor.

É importante destacar, que para o cálculo da função de transferência de um sistema elétrico, iremos considerar as condições iniciais do problema como sendo iguais a zero.

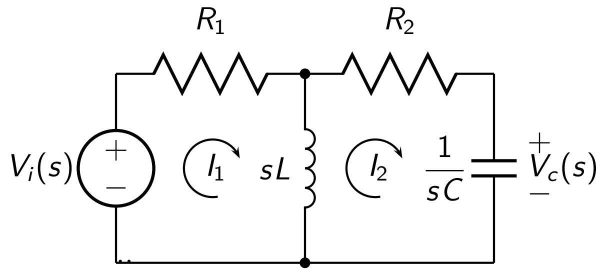

Figura 12 – Circuito RLC

Aplicando a lei de Kirchhoff no circuito acima, obtemos as seguintes equações de malha:

$$(R_1 + sL)I_1(s) - sLI_2(s) = V_i(s) \tag{56}$$

$$-sLI_1(s) + (sL + R_2 + \frac{1}{sC})I_2(s) = 0. \tag{57}$$

Escrevendo o sistema linear na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} R_1 + sL & -sL \\ -sL & sL + R_2 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ I_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i(s) \\ 0 \end{bmatrix}$$

.

Utilizando a regra de Kramer para a corrente $I_2(s)$,

$$I_2(s) = \frac{\det \begin{bmatrix} R_1 + sL & V_i(s) \\ -sL & 0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} R_1 + sL & -sL \\ -sL & sL + R_2 + \frac{1}{sC} \end{bmatrix}}$$

Calculando os determinantes e simplificando a expressão:

$$I_2(s) = \frac{s^2LC}{(R_1 + R_2)s^2LC + (R_1R_2C + L)s + R_1} V_i(s). \tag{58}$$

Sendo a tensão no capacitor igual a:

$$V_c(s) = \frac{I_2(s)}{sC}$$

e a função de transferência:

$$H(s) = \frac{V_c(s)}{V_i(s)}.$$

Explicitando $V_i(s)$ na equação (58), obtemos:

$$H(s) = \frac{sL}{(R_1 + R_2)s^2LC + (R_1R_2C + L)s + R_1}. \tag{59}$$

3.2.2 Variáveis de Estado

Na Física e na Matemática, um Sistema Dinâmico é um conceito no qual uma função descreve a relação no tempo de um ponto em um espaço geométrico. Alguns exemplos são os modelos matemáticos que descrevem o movimento de um pêndulo, a transferência de calor numa placa plana, e também, o comportamento de correntes e tensões em um circuito elétrico RLC. As variáveis de estado são uma propriedade física que caracteriza o estado de um sistema dinâmico.

Na Engenharia podemos encontrar sistemas nos quais temos mais de uma entrada e uma saída. Portanto, esta representação no qual especificamos um conjunto de variáveis que descrevem o comportamento interno do sistema é muito utilizada.

A grande vantagem da sua utilização é que se for conhecido o estado atual do sistema e os sinais de entrada, tais variáveis irão descrever o comportamento futuro do sistema.

As variáveis de estado de um sistema elétrico são, por exemplo, a corrente no indutor e a tensão no capacitor, que são responsáveis por determinar o estado de energia do sistema.

Se n variáveis de estado são necessárias para descrever completamente o comportamento de um sistema, então estas n variáveis de estado podem ser consideradas como as n componentes de um vetor $x(t)$. Tal vetor é chamado de vetor de estados.

A representação no espaço de estados é escrita da seguinte maneira:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t) \tag{60}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{61}$$

onde A é chamada de matriz de estado, B matriz de entrada, C matriz de saída e D matriz de transição direta.

Sendo:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

vetor de estado representando n vetores de estado;

$$u(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_m(t) \end{bmatrix}$$

vetor de entrada representando m entradas e;

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix}$$

vetor de saída representando p saídas, onde A, B, C e D são, respectivamente, matrizes $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ e $p \times m$.

Existe um relação entre a função de transferência e as variáveis de estado. Podemos encontrar a função de transferência do sistema a partir das vaiáveis. Apenas uma função de transferência permite inúmeras representações no espaço de estados. Entretanto, uma representação de variáveis de estado só é equivalente a uma única função de transferência.

É possível demonstrar uma fórmula na qual relaciona as matrizes de estado de maneira a encontrar sua função de transferência. Extraindo a transformada de Laplace da equação (60) supondo condições iniciais iguais a zero, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{x'(t)\} &= A\mathcal{L}\{x(t)\} + B\mathcal{L}\{u(t)\} \\ sX(s) &= AX(s) + BU(s) \\ (sI - A)X(s) &= BU(s) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s), \tag{62}$$

onde I é a matriz identidade de dimensão igual a de A.

Agora, calculando a transformada de Laplace da equação (61):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y(t)\} &= C\mathcal{L}\{x(t)\} + D\mathcal{L}\{u(t)\} \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s). \end{aligned}$$

Como a função de transferência $H(s)$ é a divisão da saída do sistema pela entrada, substituindo a equação (62) em (61), obtemos:

$$Y(s) = C[(sI - A)^{-1}BZ(s))] + DU(s).$$

Manipulando a equação de maneira conveniente, temos:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D. \tag{63}$$

Portanto, é possível determinar a função de transferência de um sistema a partir de suas equações de estado utilizando esta equação.

Agora, encararemos o problema de determinar uma representação no espaço de estado para uma dada função de transferência. Iremos utilizar a função de transferência encontrada em (59). Para tanto, foram usados os seguintes valores: $L = 1H$, $C = \frac{1}{4}F$, $R_1 = R_2 = 2\Omega$.

A equação resultante é dada por:

$$H(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 2}.$$

Iremos utilizar uma função auxiliar $W(s)$ de maneira a facilitar os cálculos. Chamaremos $N(s)$ o numerador da função e $D(s)$ o seu denominador. Portanto,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{W(s)}\frac{W(s)}{U(s)} = N(s)\frac{1}{D(s)}$$

Assim,

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{D(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$$

Portanto,

$$[s^2 + 2s + 2]W(s) = U(s).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos:

$$w'' + 2w' + 2w = u,$$

ou seja,

$$w'' = -2w' - 2w + u$$

$$\begin{cases} x_1 = w \rightarrow x_1' = w' \\ x_2 = w' \rightarrow x_2' = w'' = -2x_2 - 2x_1 + u \end{cases}$$

Dessa forma, a matriz fica da seguinte maneira,

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Em relação a saída, temos que:

$$\frac{Y(s)}{W(s)} = N(s) = s,$$

ou seja,

$$Y(s) = sW(s).$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace:

$$\begin{cases} y = w' \\ y = x_2 \end{cases}$$

Logo,

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

.

Desta forma, foi mostrado como a transformada de Laplace pode nos auxiliar numa análise do comportamento de um circuito elétrico RLC. Por meio de sua função de transferência é possível determinar o ganho do sistema, ou até mesmo analisar a estabilidade do circuito elétrico com base no estudo da mesma. Também foi mostrado como podemos, neste mesmo circuito, representá-lo por meio de variáveis de estado diretamente da sua função de transferência. Estas variáveis, como dito anteriormente, são capazes de descrever o comportamento futuro de um sistema.

4 Conclusão

O desenvolvimento do presente estudo possibilitou uma análise detalhada de como a transformada de Laplace pode ser útil no processo de resolução de equações diferenciais lineares e na análise de circuitos elétricos RLC. Procuramos ter um contato inicial com as definições e propriedades do método em questão, posteriormente aplicando em resoluções de equações diferenciais e na análise de circuitos elétricos RLC.

Foi observada a grande vantagem da aplicação em relação aos demais métodos analíticos para solução de equações diferenciais, que consiste na solução de seus respectivos PVI's de forma direta, ou seja, evitando o processo inicial de determinação de uma solução geral. Buscamos solucionar equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes constantes, devido a sua maior aplicação em áreas da Engenharia, executando a maioria dos exemplos de maneira bastante genérica.

Nos circuitos elétricos RLC foi mostrada como a análise no domínio da frequência pode ser mais interessante do que no domínio do tempo. Utilizando as leis que regem o funcionamento de um circuito elétrico e toda a teoria estudado acerca da transformadas de Laplace foi possível determinar um circuito equivalente no domínio da frequência. Posteriormente, foi determinada a função de transferência e a representação de um mesmo circuito elétrico em variáveis de estado.

A consulta a este trabalho proporciona ao leitor um ótimo embasamento teórico de teoremas e definições das transformadas de Laplace, além de suas importantes propriedades.

Devido ao fato de ser um estudo apenas de como podemos utilizar a transformada de Laplace na análise de circuitos elétricos, não foram apresentados muitos resultados físicos em relação as funções de transferência e variáveis de estado. Foi apenas mostrada a parte Matemática do processo de obtenção dessas expressões. É válido afirmar que um estudo mais detalhado acerca deste tema poderia ser realizado num trabalho posterior, mostrando, por exemplo, como as funções de transferência e variáveis de estados determinam respostas que serão importantes para o funcionamento de um sistema dinâmico qualquer.

Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. **Fundamentos de circuitos eléctricos (5a**. [S.l.]: McGraw Hill Mexico, 2013.

FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. Equações diferenciais aplicadas; coleção matemática universitária. **Rio de Janeiro**, IMPA, 2005.

KATSUHIKO, O. **Engenharia de Controle Moderno**. [S.l.: s.n.], 2011.

KREIDER, D. L.; KULLER, R. G.; OSTBERG, D. R. **Elementary differential equations**. [S.l.]: Addison-Wesley Pub. Co., 1968.

LIMA, E. L. **Analise Real**. 2 ed.. ed. [S.l.: s.n.], 1993. v. 1. (Coleção Matemática Universitária, IMPA, v. 1).

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. **Circuitos Elétricos, 8a. Edição**. [S.l.]: São Paulo, Pearson, 2008.

SILVA, P. N. da. Equações diferenciais ordinárias, volume 1 of cálculo diferencial e integral. **Rio de Janeiro,**, 2005.

SPIEGEL, M. R. **Laplace transforms**. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1965.